

Übung 3

Abgabe: Dienstag, 18. November 2003

Aufgabe 1

- 1.1** Ist die Wellenfunktion $\Psi(x) := e^{-ax^4}$ eine Eigenfunktion des Operators $\hat{A} := \frac{1}{x^3} \frac{\partial}{\partial x}$? Falls ja: Was ist der Eigenwert?
- 1.2** Ist die durch $\Psi(x) := \sin kx$ definierte Wellenfunktion eine Eigenfunktion des Impulsoperators? Falls ja: Was ist der Eigenwert?

Aufgabe 2

Man zeige, daß $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$ gilt.

Hinweis: Man berechne $[\hat{p}, \hat{x}] \Psi(x)$.

Aufgabe 3

Ein Teilchen befindet sich in einem konstanten Potential, also $V(x) \equiv V_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Wellenfunktion eine Eigenfunktion des Impulses mit Eigenwert p :

$$\Psi_0(x) = A e^{i\frac{p}{\hbar}x}.$$

- 3.1** Man zeige, daß Ψ_0 eine Eigenfunktion des Hamiltonoperators ist.
- 3.2** Man zeige, daß die Wellenfunktion zur Zeit t gegeben ist durch einen Ausdruck der Form

$$\Psi_t(x) = A e^{i\frac{p}{\hbar}(x-vt)}.$$

Wie hängt v vom Impuls-Eigenwert p ab?

- 3.3** Als was kann man v interpretieren? Kommt der Größe v eine physikalische Bedeutung zu?

Aufgabe 4

Die Wellenfunktion eines Teilchens der Masse m ist gegeben durch

$$\Psi_t(x) := C \frac{1}{\sqrt{1 + i\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_0^2(1 + i\kappa t)}\right),$$

wobei C ein Normierungsfaktor ist und κ definiert ist durch

$$\kappa := \frac{\hbar}{2\sigma_0^2 m}.$$

Anhand einer umständlichen Rechnung kann man zeigen, daß $\Psi_t(x)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung ist.

Für $t = 0$ gilt $|\Psi_0(x)|^2 = |C|^2 e^{-x^2/2\sigma_0^2}$; demzufolge ist σ_0 nichts anderes als die Ortsunschärfe zur Zeit $t = 0$ (vgl. Übung 2, Aufgabe 3).

- 4.1** Wie groß ist die Ortsunschärfe σ_t zur Zeit $t > 0$?

Hinweis: Man zeige:

$$|\Psi_t(x)|^2 \sim \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2(1 + \kappa^2 t^2)}\right)$$

- 4.2** Zur Zeit $t = 0$ hat ein Elektron die Ortsunschärfe $\sigma_0 = 1 \text{ \AA}$. Wie groß ist die Ortsunschärfe nach einer Sekunde?
- 4.3** Zur Zeit $t = 0$ hat eine Billardkugel ($m = 170 \text{ g}$) die Ortsunschärfe $\sigma_0 = 1 \text{ nm}$. Wie groß ist die Ortsunschärfe nach einer Sekunde?