Theoretische Grundlagen der Umweltchemie II

Lösung zu Übung 3

Aufgabe 1

1.1 $\frac{1}{x^3}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x) = \frac{1}{x^3} e^{-ax^4}(-4ax^3)$
$= -4a\Psi(x)$

$\Rightarrow$ Ψ ist Eigenfunktion mit Eigenwert $-4a$

1.2 $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\sin kx = \frac{\hbar k}{i}\cos kx \neq \text{const.}\sin kx$

$\Psi: x \mapsto \sin kx$ ist keine Eigenfkt. des Impulsoperators

Hingegen sind $x \mapsto e^{ikx}$ und $x \mapsto e^{-ikx}$ Eigenfunktionen des Impulsoperators, mit Eigenwerten $\pm\hbar k$, aber die Superposition $x \mapsto \sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$ nicht!

Aufgabe 2

$$[\hat{p},\hat{x}]\Psi(x) = [\tfrac{\hbar}{i}\tfrac{\partial}{\partial x}, x]\Psi(x)$$
$$= \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x} x\Psi(x) - x\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)\right)$$
$$= \frac{\hbar}{i}\left(\Psi(x) + x\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x) - x\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x)\right)$$
$$= \frac{\hbar}{i}\Psi(x) = -i\hbar\Psi(x)$$

$\Rightarrow$ $[\hat{p},\hat{x}] = -i\hbar$

(genauer: $[\hat{p},\hat{x}] = -i\hbar\hat{1}$ wobei $\hat{1}$ der Einheitsoperator ist)

Aufgabe 3

3.1 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0$

$$\hat{H}\Psi_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} A e^{i\frac{p}{\hbar}x} + V_0 A e^{i\frac{p}{\hbar}x}$$
$$= \dots = \frac{p^2}{2m} A e^{i\frac{p}{\hbar}x} + V_0 A e^{i\frac{p}{\hbar}x}$$
$$= \underbrace{\left(\frac{p^2}{2m} + V_0\right)}_{E}\Psi_0(x)$$

3.2 $\Psi_t(x) = \Psi_0(x)\, e^{-itE/\hbar}$
$= A e^{i\frac{p}{\hbar}x} e^{-itE/\hbar}$
$= A e^{i\frac{p}{\hbar}(x - \frac{E}{p}t)}$

$\Rightarrow$ $v = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} + \frac{V_0}{p}$

3.3 v ist die Geschwindigkeit, mit der sich die „farbigen Streifen" bewegen (die sogenannte Phasengeschwindigkeit).

Da die Phasengeschwindigkeit von der Wahl des Energienullpunkts abhängt, hat sie keine unmittelbare physikalische Bedeutung.

Aufgabe 4

4.1 $|\Psi_t(x)|^2 = \text{const.}\left|\exp\left(-\frac{x^2}{-4\sigma_0^2(1+i\kappa t)}\right)\right|^2$

$$\frac{x^2}{4\sigma_0^2(1+i\kappa t)} = \frac{x^2(1-i\kappa t)}{4\sigma_0^2(1+\kappa^2t^2)}$$
$$= \frac{x^2}{4\sigma_0^2(1+\kappa^2t^2)} - i\frac{x^2\kappa t}{4\sigma_0^2(1+\kappa^2t^2)}$$

$$|\Psi_t(x)|^2 = \text{const.}\left|\exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma_0^2(1+\kappa^2t^2)}\right)\right|^2 \cdot \underbrace{\left|\exp\left(\frac{ix^2\kappa t}{4\sigma_0^2(1+\kappa^2t^2)}\right)\right|^2}_{1}$$
$$= \text{const.}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2(1+\kappa^2t^2)}\right)$$

$\Rightarrow$ $\sigma_t = \sigma_0\sqrt{1+\kappa^2t^2}$

4.2 Elektron: $m = 9\cdot10^{-31}$ kg, $\sigma_0 = 10^{-10}$ m
$\Rightarrow$ $\sigma_{1s} = \dots = 580$ km (!!)

4.3 Billardkugel: $m = 0{,}17$ kg, $\sigma_0 = 10^{-9}$ m
$\Rightarrow$ $\sigma_{1s} = 10^{-9}\,\text{m}\sqrt{1+(3{,}1\cdot10^{-16})^2} = 10^{-9}$ m